

Continuación de órbitas periódicas en hamiltonianos con simetría: aplicación a mecánica celeste.

J. Galán¹ F.J. Muñoz Almaraz¹ E. Freire¹ E. Doedel²
A. Vanderbauwhede²

Resumen

Presentamos un esquema de continuación de órbitas periódicas para sistemas hamiltonianos con simetría. Justificamos, desde un punto de vista teórico la validez del método y lo aplicamos al problema de los tres cuerpos en forma de ocho, recientemente descubierta por Chenciner y Montgomery.

Introducción

En un sistema hamiltoniano genérico, la probabilidad de encontrar al azar una condición inicial de movimiento que corresponda, precisamente, a la de una solución periódica es nula. Sin embargo, las órbitas periódicas son muy abundantes y forman familias continuas en el espacio de las fases. Su estudio tiene más de un siglo [8] de antigüedad, y puede conducirnos a una comprensión del comportamiento dinámico general de cualquier sistema mecánico. De hecho, una famosa conjetura de Poincaré afirma que las órbitas periódicas están densamente distribuidas entre todas las posibles trayectorias acotadas en un sistema hamiltoniano genérico.

El comportamiento de bifurcación de los sistemas hamiltonianos es muy rico y el parámetro natural a variar en el caso autónomo es la energía. Sin embargo, ésta no aparece directamente en las ecuaciones. Un resultado bien conocido [5] afirma que las órbitas periódicas *elementales*, es decir, aquellas que sólo presentan dos multiplicadores característicos iguales a 1, pueden ser continuadas, pero no proporciona ningún procedimiento práctico para calcular la familia de soluciones periódicas.

Desde el punto de vista numérico, existe un procedimiento directo y constructivo que consiste en eliminar una de las variables de la expresión de la energía, elegir una sección transversal al flujo y buscar soluciones periódicas en el problema reducido. Este esquema puede extenderse al caso de más de una cantidad conservada y ha sido ampliamente utilizado en la literatura[10].

En este trabajo, presentamos una aplicación de un esquema computacional alternativo [6] al comentado anteriormente, para continuar órbitas periódicas en sistemas hamiltonianos con simetrías continuas. Las constantes de movimientos no se emplean para reducir la dimensión del problema, sino que son tenidas en cuenta de otra forma. El objetivo es seguir las familias de órbitas periódicas, localizar los casos degenerados y

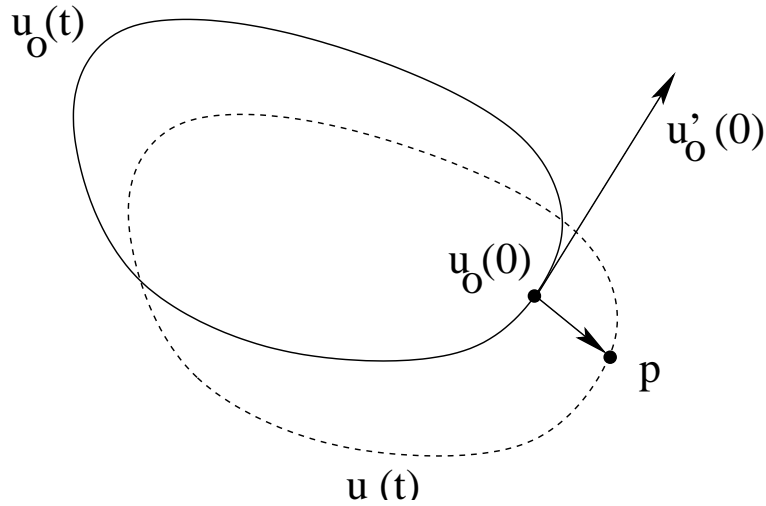


Figura 1: Representación esquemática del problema de continuación.

describir el comportamiento de bifurcación. La idea fundamental consiste en reformular el problema de encontrar órbitas periódicas como un problema de contorno, destruir el carácter conservativo del sistema añadiendo un término perturbativo adecuado por cada cada cantidad conservada y hacer uso de un código de continuación numérica basado en el método de colocación [3]. El proceso de continuación se realiza con respecto al periodo y a los términos perturbativos auxiliares. Estos últimos se han elegido de manera que a lo largo de la rama necesariamente deben de anularse. La idea subyacente es la de considerar a un sistema hamiltoniano como una bifurcación de Hopf “vertical” en el parámetro ficticio, y aparece, por ejemplo, en la prueba clásica de teorema de centro de Lyapunov, o, en un problema similar al nuestro, en el problema de la persistencia de soluciones en *breathers* [9].

Continuación numérica

En la figura 1 representamos de manera esquemática el proceso de continuación de soluciones periódicas. La órbita a trazo continuo representa la solución conocida ($u_0(t)$) y la de trazo discontinuo ($u(t)$) es la nueva solución a determinar en el siguiente paso de continuación. Al tratarse de un problema autónomo, el origen de tiempo no está fijo y es necesario imponer una condición adicional a lo largo de la rama. Esto se puede hacer imponiendo una condición de contorno (condición de Poincaré) que fija el origen de las fases a lo largo de la rama con un claro sentido geométrico, o, de manera equivalente, imponiendo una condición integral[2].

Este problema también aparece cuando existen simetrías continuas; al aplicar la simetría a cualquier solución periódica obtenemos otra solución periódica con los mismos valores de las cantidades conservadas. Este hecho debe tenerse en cuenta a la hora de continuar las soluciones. La formulación precisa del método es la que se expone a continuación.

Las ecuaciones de movimiento son

$$u' = J\nabla H(u(t)), \quad (1)$$

donde $H \in C^1(U)$ es la función hamiltoniana que se conserva, $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$, y U es un abierto de \mathbb{R}^{2n} . Consideremos un sistema hamiltoniano con simetrías continuas. Una aplicación directa del teorema de Noether proporciona una constante de movimiento $F_i \in C^1(U)$ ($i = 1, \dots, k$) asociada a cada una de las k simetrías del sistema. Tenemos, por tanto, $k+1$ constantes de movimiento.

Para una órbita *genérica* del sistema dinámico, los vectores $\nabla H(x)$ y $\nabla F_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$) serán *linealmente independientes*.

Sea u_0 una órbita periódica del sistema (1) con periodo T_0 . Encontrar una órbita periódica con periodo T es equivalente a resolver el problema de contorno

$$\begin{aligned} u'(t) &= T[J\nabla H(u(t)) + \alpha \nabla H(u(t)) + \sum_{i=1}^k \beta_i \nabla F_i(u(t))], \\ u(1) &= u(0), \end{aligned} \quad (2)$$

siempre que α y β_i ($i = 1, \dots, k$) se anulen. Denotemos $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$.

El problema de continuación es

$$p = u(1; p, T, \alpha, \beta), \quad (3)$$

donde $u(t; p, T, \alpha, \beta)$ es la solución de la Eq. (2) con la condición inicial $u(0) = p$.

Consideremos una solución $u_0(t)$ tal que $u_0(1) = u_0(0)$ y tal que $T = T_0$, $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Sea $V(t)$ la solución fundamental del sistema variacional

$$v'(t) = T_0 J D^2 H(u_0(t)) v(t). \quad (4)$$

Construimos la función $G : \mathbb{R}^{2n+3} \mapsto \mathbb{R}^{2n+2}$ añadiendo $k+1$ condiciones de contorno.

$$G(p, T, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} u(1; p, T, \alpha, \beta) - p \\ (p - u_0(0))^* J \nabla H(u_0(0)) \\ (p - u_0(0))^* J \nabla F_1(u_0(0)) \\ \vdots \\ (p - u_0(0))^* J \nabla F_k(u_0(0)) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Los ceros de esta función son las soluciones periódicas del problema.

El resultado que nos permite continuar una familia uniparamétrica de órbitas periódicas en un sistema hamiltoniano es el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sea u_0 una solución cuya matriz de monodromía $V(1)$ tiene 1 como autovalor de multiplicidad geométrica $k+1$, entonces existe una rama de soluciones única de la ecuación $G(p, T, \alpha, \beta) = 0$ cerca de $(u_0(0), T_0, 0, 0)$. Además, los parámetros α y β_i ($i = 1, \dots, k$) se anulan a lo largo de dicha rama.*

La prueba de este teorema, así como su aplicación a diversos ejemplos pueden encontrarse en la referencia [6]. Destaquemos que el método de continuación también es aplicable sin modificaciones al caso que en decidamos continuar con respecto a uno de los parámetros explícitos del sistema, pero, en este caso, debemos fijar la energía o el periodo de la familia de órbitas.

Aplicación al problema de los tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos sometidos a la acción de la gravedad es muy fácil de formular, pero imposible de resolver, y ha sido objeto de interés para los matemáticos y los físicos desde que Newton formulara la ley de atracción universal. Es un sistema dinámico de dimensión 18, que, en las unidades adecuadas, puede escribirse como

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= m_2 \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{\|x_3 - x_1\|^3} \\ \ddot{x}_2 &= m_1 \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3} + m_3 \frac{x_3 - x_2}{\|x_3 - x_2\|^3} \\ \ddot{x}_3 &= m_1 \frac{x_1 - x_3}{\|x_1 - x_3\|^3} + m_2 \frac{x_2 - x_3}{\|x_2 - x_3\|^3},\end{aligned}$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del cuerpo i , y $m_i \geq 0$ ($i=1,2,3$) es su correspondiente masa. El sistema es hamiltoniano y presenta 6 constantes de movimiento adicionales: las tres componentes del momento lineal (debido a la invariancia frente a traslaciones) y las tres componentes del momento angular (giros).

Recientemente, Chenciner y Montgomery [1] han demostrado la existencia de una solución particular en la que los tres cuerpos se persiguen sobre una única curva en forma de ocho. La técnica empleada ha sido la de minimizar la acción sobre una familia de arcos **simétricos**. Simó [11] ha implementado ese procedimiento de manera numérica y ha calculado los multiplicadores característicos de la órbita, y ha anunciado que la órbita es **elípticamente** estable: $\mu_j = \exp(\pm 2\pi i \nu_j)$, con $\nu_1 = 0.00842272$, $\nu_2 = 0.29809253$. Además, esta estabilidad se conserva para variaciones pequeñas de las masas ($\sim 10^{-5}$).

Offin [7] ha demostrado que la solución en forma de ocho no puede ser la que minimice la acción en el espacio de la órbitas periódicas, ya que, en este caso, debería ser del tipo **parabólico/hiperbólico**, y concluye que debe existir una solución inestable en la misma clase de homotopía pero con menos simetría que la solución en forma de ocho.

Resultados

Aplicando el esquema descrito en este trabajo y tomando como solución inicial la solución en forma de ocho numéricamente calculada por Simó, hemos continuado la familia de órbitas periódicas variando una de las masas.

En la figura 2 representamos el resultado de la continuación para valores próximos a $m_1 = 1$. El panel superior es la energía, el de en medio es la norma L_2 de la solución y el inferior representa el valor de la acción a lo largo de la familia. El punto de partida, la solución en forma de ocho, está marcada por una flecha y el símbolo CM. Al aumentar la masa de uno de los cuerpos (m_1), la solución deja de ser una “coreografía” [11], es decir los tres cuerpos ya no siguen la misma trayectoria, sino que describen tres trayectorias en forma de ocho pero desplazadas ligeramente. Las órbitas periódicas próximas a la solución CM, siguen siendo elípticamente estables hasta que encuentran un punto de retorno (limit point) y se dan la vuelta hacia valores menores del parámetro

de continuación. A partir de ese momento, la solución pasa a ser inestable y dos de los multiplicadores característicos abandonan el círculo unidad. Al pasar de nuevo por el valor de la masa igual a uno hemos marcado la solución con una letra “O”. Esta órbita es la solución prevista por Offin en la misma clase de homotopía que la de forma de ocho, pero ahora es hiperbólica (inestable) y tiene una norma ligeramente mayor. De manera sorprendente, y dentro de la precisión del cálculo, el valor de la energía y de la acción es la misma que la CM. En principio, esperaríamos que al relajar la condición de que la solución sea una coreografía, es decir al pasar del espacio de funciones periódicas con esa simetría al espacio de funciones periódicas en el calculo variacional, el valor de la acción fuera menor.

Si, al partir de la solución CM, disminuimos el valor de la masa m_1 la solución también es estable y pierde la estabilidad en una bifurcación de punto de ramificación (BP) con dos +1 adicionales como multiplicadores característicos.

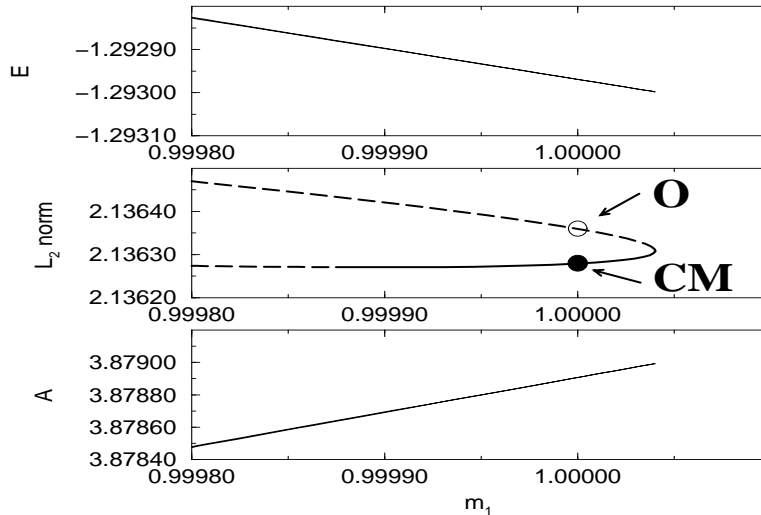


Figura 2: Resultados de la continuación de la solución en forma de ocho.

En la figura 3 representamos en las variables cartesianas las soluciones CM y O citadas anteriormente. La evolución de los multiplicadores característicos de la órbita a lo largo de la familia se representa en la figura 4. La precisión del método puede comprobarse comparando los valores de los exponentes característicos de la solución CM; $\nu_1 = 0.00842267$, y $\nu_2 = 0.29809252$, donde hemos subrayado las cifras donde aparecen diferencias con los resultados de Simó [11].

Conclusiones

En este trabajo hemos demostrado la eficacia de un método de continuación general para sistemas hamiltonianos con simetrías continuas a un problema concreto con siete constantes de movimiento. Hemos analizado la estabilidad y el comportamiento de

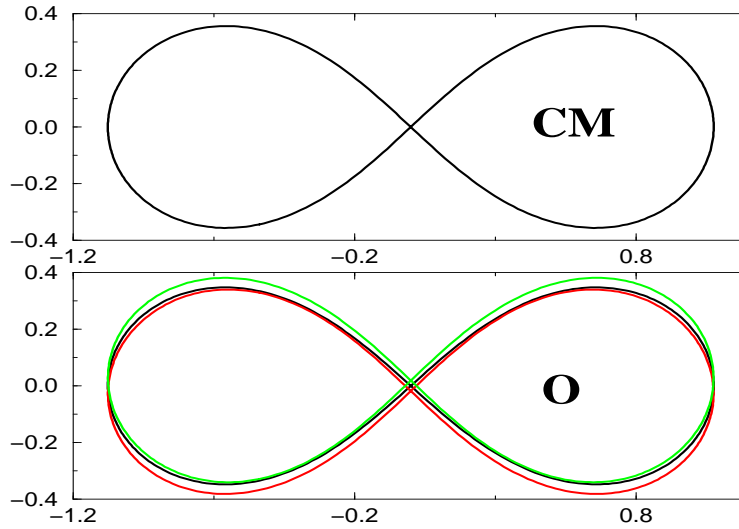


Figura 3: Representación en espacio real de la solución de Chenciner y Montgomery (CM) y la predicha por Offin (O)

bifurcación de la solución en forma de ocho al problema de los tres cuerpos, clarificando la relación entre esta solución elíptica y otra de tipo hiperbólica predicha por un argumento variacional. Debemos mencionar que los resultados del método se extienden también a valores de la masa m_1 en el intervalo $(0, 1)$ y que, como podíamos esperar, el comportamiento de bifurcación es muy rico, y que la solución en forma de ocho está conectada mediante familias a las soluciones del problema de tres cuerpos restringido ($m_1 = 0$) [4].

Agradecimientos

Los autores agradecen a J. LLibre, R. Montgomery y A. Zevin por diversas aclaraciones y fructíferas conversaciones, y financiación de la OTAN (CRG-972260). J.G, F.J.M-A y E. F. han sido parcialmente financiados por la Junta de Andalucía y DGES PB98-1152, y E.J.D. por NSERC (Canada) Research Grant A4274 y NSF-KDI Grant 9873173.

Referencias

- [1] A. Chenciner and R. Montgomery, “A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses”, *Annals of Mathematics* (2000).
- [2] E. J. Doedel, H. B. Keller and J. P. Kernévez, *Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems, Part II: Bifurcation in Infinite Dimensions*, Int. J. Bif. and Chaos, No. 4, 745-772 (1991).

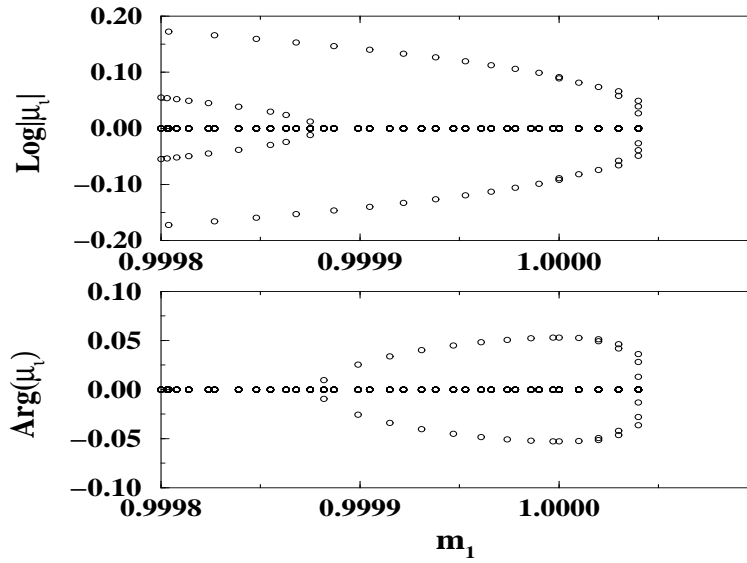


Figura 4: Evolución de los multiplicadores característicos significativos a lo largo de la rama como función de la masa m_1 . Representamos el logaritmo del módulo (arriba) y el argumento principal (abajo).

- [3] E. J. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede, and X.-J. Wang, “AUTO97: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations”, Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Canada, (1997). (<ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto>)
- [4] E. J. Doedel *et al* (unpublished).
- [5] M. K. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Springer Verlag (1992).
- [6] F. J. Muñoz-Almaraz, E. Freire, E. Doedel, A. Vanderbauwhede and J. Galán, “Continuation of periodic orbits in symmetric Hamiltonian systems” (submitted).
- [7] D. Offin, “Instability for symmetric periodic solutions of the planar three body problem” (preprint).
- [8] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris 1899.
- [9] J.A. Sepulchre and R. MacKay, “Localized oscillations in conservative or dissipative networks of weakly coupled autonomous oscillators”, *Nonlinearity* **10** (1997), 673-713.
- [10] C. Simó, in *Cent ans après les Méthodes Nouvelles H. Poincaré*, Société Mathématique de France, 1996, pp 1-23.

- [11] C. Simó, “New Families of solutions in N-body problems”, Proceedings of the ECM 2000, Barcelona (July, 10-14). Available at <http://www.iec.es/3ecm>

- 1 Departamento de Matemática Aplicada II. Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n. Sevilla 41092
- 2 Department of Computer Science. Concordia University. 1455 Boulevard de Maisonneuve O. Montreal, Quebec, H3G 1M8, Canada
- 3 Department of Pure Mathematics and Computer Algebra. University of Gent. Krijgslaan 281 B-9000 Gent, Belgium