Continuación Numérica de Órbitas Periódicas en Sistemas Hamiltonianos con Simetría.

F. J. Muñoz[1] J. Galán[1] E. Freire[1] E. J. Doedel[2]

Resumen

Presentamos un procedimiento para continuar numéricamente soluciones periódicas en sistemas hamiltonianos. El objetivo es la detección de situaciones de degeneración y el estudio de la correspondiente conducta de bifurcación partiendo de los modos normales del sistema o de alguna otra familia de soluciones periódicas. Exponemos métodos de continuación aplicados a un caso integrable de dos grados de libertad con simetría a giros.

Introducción

Desde los trabajos de Poincaré se sabe que las órbitas periódicas, en general, no están aisladas en un sistema hamiltoniano. Su comportamiento de bifurcación es muy variado [1] y constituyen la clave para entender el comportamiento global. Más aún, en mecánica cuántica, se ha puesto de manifiesto la importancia de las órbitas periódicas en la transición del régimen clásico al cuántico.

En los sistemas disipativos las órbitas periódicas están generalmente aisladas lo cual permite que sean continuadas respecto a los parámetros de control, una vez la condición de fase ha sido adecuadamente considerada. Por contraste, en los sistemas hamiltonianos las órbitas periódicas aparecen en forma de familias continuas en el espacio de las fases y pueden ser investigadas variando algún parámetro externo o el parámetro natural que es la energía. Sin embargo, generalmente, ésta no aparece directamente en las ecuaciones, dificultando la continuación.

Si, además, estamos en presencia de un grupo continuo de simetrías nos encontraremos con una degeneración adicional. Asociado a la simetría el teorema de Noether proporciona una segunda constante de movimiento.

En este trabajo presentamos dos resultados teóricos referentes a los multiplicadores característicos para el caso de sistemas con varias integrales primeras. Además, mostramos como el problema de la continuación numérica puede ser solventado perturbando el sistema con un término disipativo controlado por un parámetro auxiliar y considerando a la órbita periódica como el resultado de una bifurcación de Hopf en el valor que anula al parámetro añadido.

Las ecuaciones de movimiento asociadas a un hamiltoniano autónomo $H(q,p)$ son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \,.$$

Si añadimos una perturbación de la forma $\varepsilon\nabla H(q,p)$ ($\varepsilon \ll 1$), en general, destruimos el carácter hamiltoniano del problema. La perturbación actua como un término disipativo de manera que para valores no nulos de ε, destruimos las órbitas periódicas que existen en el caso hamiltoniano ($\varepsilon = 0$).

Con este término auxiliar, un equilibrio persiste para $\varepsilon \neq 0$. Si el equilibrio del sistema hamiltoniano es elíptico, por el teorema de Lyapunov está rodeado de soluciones periódicas (modos normales). Con respecto al parámetro ε, la aparición de estas soluciones periódicas puede verse como una bifurcación de Hopf para $\varepsilon = 0$. De esta forma, podemos continuar las órbitas periódicas que nacen de la bifurcación de Hopf en el parametro auxiliar y en el periodo, siempre que el valor del parámetro auxiliar se mantenga nulo.

Nuestro objetivo en la continuación de órbitas periódicas en sistemas hamiltonianos es la detección de situaciones de degeneración y el estudio de la correspondiente conducta de bifurcación. En particular, se trata de detectar numéricamente las bifurcaciones subarmónicas y las ramas que emanan de ellas. Para ello hemos suplementado el código de continuación AUTO [3] de manera adecuada y lo aplicamos al caso del péndulo esférico (dos grados de libertad e integrable).

El procedimiento es el siguiente: calculamos los modos normales que nacen de los equilibrios del sistema y los continuamos en función de la energía. Uno de estos modos normales es un equilibrio relativo (solución rotating) que es invariante frente a la acción de la simetría.

En los casos de degeneración más bajas hemos continuado las ramas de soluciones que nacen en las bifurcaciones subarmónicas y hemos obtenidos *puentes* entre distintas bifurcaciones. De esta forma conseguimos una descripción global del comportamiento del sistema.

Debemos mencionar que el procedimiento ha sido utilizado en otros ejemplos más complicados pero, por razones de espacio, en este trabajo, nos centramos en el problema del péndulo esférico:

- un modelo de pozos cuánticos en la aproximación de campo medio [5] (caso no integrable con simetría).
- modos normales del péndulo elástico (caso no integrable sin simetría).
- bifurcaciones de las soluciones periódicas en el problema de tres cuerpos restriguidos cerca del equilibrio L_4 (bifurcacion de Hopf hamiltoniana).
- problema de Kepler en coordenadas rotantes.

Resultados

Lema 1: Sean $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una función suficientemente regular y una órbita periódica del sistema $\dot{x} = f(x)$. Si el sistema posee m integrales primeras cuyos gradientes son linealmente independiente en un punto de la órbita periódica, entonces el uno es un multiplicador característico cuya multiplicidad es, al menos, $m + 1$.

DEMOSTRACIÓN[1] :

Sea $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una integral primera, lo que por definición significa que para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$F(\varphi(t,\xi)) = F(\xi), \tag{1}$$

donde $\varphi(t,\xi)$ denota la solución de $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$. Sean ξ_0 un punto de la órbita periódica y T el periodo de dicha órbita. Derivando respecto de la variable espacial ξ en el punto (T, ξ_0) se obtiene que $\nabla F(\xi_0)$ es un autovector izquierdo de la matriz de monodromía $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}(T, \xi_0)$, que denotaremos por A.

Dada la condición de periodicidad para φ $[\varphi(t,\xi_0) = \varphi(T, \varphi(t,\xi_0))$ para todo $t \in \mathbb{R}]$, se obtiene al derivar respecto la variable t que $f(\xi_0)$ es un autovector derecho de A.

Análogamente, al derivar la expresión (1) respecto la variable t resulta que los autovectores, $\nabla F(\xi_0)$ y $f(\xi_0)$, son ortogonales entre sí.

Dadas m integrales primeras F_i para $i = 1, \ldots, m$ cuyos vectores gradientes sean linealmente independientes $\{\nabla F_1(\xi_0), \ldots, \nabla F_m(\xi_0)\}$ es posible construir un nuevo conjunto de autovectores

$$\alpha_{j1} \nabla F_1(\xi_0) + \ldots + \alpha_{jm} \nabla F_m(\xi_0),$$

para $j = 1, \ldots, m$ que sean ortogonales entre sí. Por tanto, las integrales primeras $G_j(\xi_0) = \alpha_{j1} F_1(\xi_0) + \ldots + \alpha_{jm} F_m(\xi_0)$ tienen gradientes ortogonales entre sí.

Denotemos $v_1 = f(\xi_0)$, $v_j = \nabla G_{j-1}(\xi_0)^t$, para $j = 2, \ldots, m+1$. Al formar $\{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ un sistema ortogonal, existe $\{w_1, \ldots, w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ tal que $w_j = v_j / \|v_j\|$, para $j = 1, \ldots, m+1$. Sea $P = [w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_n]$, matriz que es ortogonal y permite encontrar una matriz equivalente a A de estructura más sencilla

$$P^{-1}AP = [P^{-1}w_1 \mid P^{-1}Aw_2 \mid \ldots \mid P^{-1}Aw_n] = [e_1 \mid P^{-1}Aw_2 \mid \ldots \mid P^{-1}Aw_n],$$

por otro lado, al ser P ortogonal resulta

$$P^{-1}AP = P^tAP = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{m+1} \\ w_{m+2} \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} AP = \begin{bmatrix} w_1A \\ w_2A \\ \vdots \\ w_{m+1}A \\ w_{m+2}A \\ \vdots \\ w_nA \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} w_1A \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{m+1} \\ w_{m+2}A \\ \vdots \\ w_nA \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} w_1AP \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{m+1} \\ w_{m+2}AP \\ \vdots \\ w_nAP \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, $P^{-1}AP$ tiene la estructura,

$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix},$$

[1]Este teorema es una extensión del Lema **V.7** de [4]. y fue probado por Poincaré en 1899 [6]

y la multiplicidad del uno es, al menos, $m+1$.

$\blacksquare$

Por tanto, las orbitas periódicas de un sistema hamiltoniano con dos integrales primeras independientes **no son elementales**.

A continuación probamos que los equilibrios relativos (soluciones rotating) en un sistema hamiltoniano con dos integrales primeras no estan en la situación anterior y **pueden ser elementales**.

Lema 2: Sea $H : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable y $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ la solución del sistema $\dot{x} = J\nabla H(x)$ con $x(0) = \xi$. Sea $F : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ solución de $\dot{x} = J\nabla F(x)$ con $x(0) = \xi$ tal que $H(\psi(t,\xi)) = H(\xi)$ para todo $t \in R$ y $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$. Si una órbita periódica es invariante por $\psi(t,\cdot)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces los gradientes de H y F son linealmente dependientes en todos los puntos de la órbita periódica.

$\blacksquare$

La idea para la demostración de este resultado es bastante intuitiva y consiste en probar que si ξ_0 es un punto de la órbita periódica, entonces las curvas $\gamma_1(t) = \varphi(t,\xi_0)$ y $\gamma_2(t) = \psi(t,\xi_0)$ tienen el mismo vector tangente en el punto ξ_0. No incluimos los detalles técnicos de la prueba.

La condición de que los vectores gradientes de las integrales primeras sean dependientes en un sistema con dos integrales primeras es necesaria para que la órbita sea elemental. Sin embargo, como muestra el contraejemplo de las órbitas circulares en el problema de Kepler en coordenadas fijas [4], no es una condición suficiente.

Caso integrable: péndulo esférico

Dada la esfera $x^2+y^2+z^2 = L^2$, consideremos su parametrización por coordenadas esféricas ($x = L\cos(q_1)\cos(q_2)$, $y = L\cos(q_1)\sin(q_2)$ y $z = L\sin(q_1)$) .

El péndulo esférico en variables adimensionales tiene por hamiltoniano:

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}(1+\tan^2 q_1) + \omega^2(1+\sin q_1),$$

donde $q_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es el ángulo azimutal y $q_2 \in (0, 2\pi)$ es el ángulo polar, p_1 y p_2 son los momentos asociados medidos en la escala mL^2, $\omega^2 = \frac{g}{L}$ y g, m y L son la aceleración de la gravedad, la masa y la longitud del péndulo, respectivamente. Tomando como orígen de potencial el plano $z = -L$ el hamiltoniano es siempre positivo.

Las ecuaciones de movimientos resultan:

$$\begin{aligned}
\dot{q_1} &= p_1 && (2)\\
\dot{q_2} &= p_2(1+\tan^2 q_1) && (3)\\
\dot{p_1} &= -p_2^2 \tan q_1(1+\tan^2 q_1) - \omega^2\cos q_1 && (4)\\
\dot{p_2} &= 0 && (5)
\end{aligned}$$

Los “equilibrios” en sentido físico son $P_s = (q_{1s}, q_{2s}, p_{1s}, p_{2s}) = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ y $P_n = (q_{1n}, q_{2n}, p_{1n}, p_{2n}) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

En coordenadas esféricas no es posible linearizar en torno a los equilibrios, aunque por medio de argumentos físicos es posible ver que P_s es elíptico y P_n es un punto de silla. Además, los modos normales que arrancan en P_s tienen la misma frecuencia (resonancia 1:1).

Estos modos normales corresponden a:

• **Movimientos de libración** ($p_2 = 0$, q_2 arbitrario y q_1 y p_1 verificando la ecuación del péndulo simple).

• **Soluciones de equilibrios relativos** (soluciones con ángulo azimutal constante $q_1 = \theta_0$). Las coordenadas esféricas permiten un estudio completo de este tipo de órbitas De (2) y $\dot{q}_1 = 0$ se deduce que $p_1 = 0$, con lo que $\dot{p}_1 = 0$. Por último de (4) obtenemos la relación

$$p_2^2 = -\frac{\omega^2 \cos\theta_0}{\tan\theta_0(1+\tan^2\theta_0)} = -\frac{\omega^2\cos^4\theta_0}{\sin\theta_0}. \tag{6}$$

Es trivial que la expresión (6) sólo tiene sentido si $\theta_0 \in (-\pi/2, 0)$. Podemos concluir que para $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ no existirán equilibrios relativos; es decir, los equilibrios relativosno superan la altura del ecuador ($\theta = 0$).

Integrando la ecuación (3) obtenemos las ecuaciones

$$q_1(t) = \theta_0, \quad q_2(t) = \frac{\omega}{\sqrt{-\sin\theta_0}}t, \quad p_1(t) = 0, \quad p_2(t) = \omega\frac{\cos^2\theta_0}{\sqrt{-\sin\theta_0}}.$$

El periodo de dicha órbita es $T = 2\pi\dfrac{\sqrt{-\sin\theta_0}}{\omega}$.

Figura 1: Energía (H) frente al momento angular (P_2) (a) y argumento del multiplicador característico para el equilibrio relativo (b).

Para estudiar la estabilidad del equilibrio relativo, calculamos el jacobiano del campo a lo largo de la órbita periódica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2p_2\tan\theta_0(1+\tan^2\theta_0) & 0 & 0 & 1+\tan^2\theta_0 \\ -p_2^2(1+3\tan^2\theta_0)(1+\tan^2\theta_0)+\omega^2\sin\theta_0 & 0 & 0 & -2p_2\tan\theta_0(1+\tan^2\theta_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de dicha matriz es

$$\det(J-\lambda I)=\lambda^2(\lambda^2+p_2^2(1+3\tan^2\theta_0)(1+\tan^2\theta_0)-\omega^2\sin\theta_0),$$

con lo que los autovalores de la matriz J, es decir, los exponentes característicos de los equilibrios relativos son

$$\lambda_0=0 \quad \text{(doble)} \quad \lambda_1=\omega\sqrt{\frac{1+3\sin^2\theta_0}{\sin\theta_0}} \quad \lambda_2=-\omega\sqrt{\frac{1+3\sin^2\theta_0}{\sin\theta_0}}.$$

Los dos últimos autovalores que aparecen son imaginarios puros. En la figura 1 representamos el argumento del multiplicador característico en función de la energía con $\omega=1$. El multiplicador característico no trivial pasa por todas las raíces de la unidad (bifurcaciones subarmónicas) antes de volver a pasar por $+1$ para energía infinita.

Una vez abordado el estudio de los equilibrios relativos se concluye que el problema del péndulo esférico es integrable en el sentido de Liouville, pues los gradientes de las dos integrales primeras

$$\begin{pmatrix} \nabla H^t \\ \nabla p_2^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_2^2\tan(q_1)(1+\tan^2(q_1))+\omega^2\cos(q_1) & 0 & p_1 & p_2(1+\tan^2 q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

están en involución y son linealmente independientes, salvo en el conjunto donde se verifica la ecuación (6), cuyo complementario es denso en $(-\pi/2,\pi/2)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Como comentamos anteriormente, en coordenadas esféricas tenemos problemas para trabajar cerca de P_n y, análogamente en P_s. El problema planteado es evitable si se realiza un cambio a coordenadas estereográficas.

$$q_1=\operatorname{arcsen}\frac{\varphi_1^2+\varphi_2^2-4}{\varphi_1^2+\varphi_2^2+4}, \qquad q_2=\operatorname{arctg}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Para ello consideremos una función generadora apropiada:

$$S=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\varphi_1^2+\varphi_2^2-4}{\varphi_1^2+\varphi_2^2+4}\right)p_1+\operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)p_2,$$

donde φ_1, φ_2 son las coordenadas estereográficas y ψ_1, ψ_2 son sus respectivos momentos conjugados. Esta función generadora proporciona el siguiente hamiltoniano:

$$H=\frac{1}{32}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+4)^2(\psi_1^2+\psi_2^2)-8\omega^2\frac{1}{\varphi_1^2+\varphi_2^2+4}.$$

De esta forma, es posible detectar los modos normales en el punto P_s y continuar las dos ramas de equilibrios relativos con momento angula positivo y negativo, respectivamente, y la solución de libración. En la figura 2 mostramos estas tres ramas. Nótese que la solución de libración se encuentra con el equilibrio del péndulo invertido para $q_1=\frac{\pi}{2}$, y la órbita pasa a ser una homoclina. Si aumentamos aún más la energía la solución corresponde a rotaciones del péndulo en un plano vertical.

De acuerdo con los resultados teóricos presentados las ramas que nacen de las bifurcaciones subarmónicas necesariamente han de tener los cuatro multipicadores iguales a

1. La razón geométrica es que son una familia de soluciones periódicas que se encuentran sobre un toro y podemas pasar de una a otra solución mediante un giro alrededor del eje OZ.

Sin embargo, formulando el problema de la continuación numérica como un problema de contorno con ayuda de una sección de Poincaré y fijando una condición en una de las variables para eliminar el problema de la fase (por ejemplo hacer $\phi(0) = 0$ en las coordenadas estereográficas) la órbita que se encuentra sobre el toro y verifica la condición está aislada y puede continuarse con ayuda del parámetro auxiliar. De esta forma hemos calculado las ramas de órbitas no simétricas que nacen en la bifurcación de duplicación y triplicación de periodo y comprobado numéricamente que **todas** las ramas de órbitas no simétricas acumulan en el equilibrio invertido (ver figura 2a).

Finalmente, en la figura 2b presentamos dos órbitas en espacio real sobre la rama de duplicación de periodo junto con la solución de equilibrio relativo.

Figura 2: (a) Conjunto de bifurcacion momento angular frente a energía (p_2–H). Mostramos dos familias de equilibrios relativos, la de libración y las ramas de dulicación y triplicación de periodo. (b) Órbitas en espacio real: equilibrio relativo y soluciones no simétricas que nacen en la bifurcación de duplicación de periodo.

Agradecimientos

Agradecemos la colaboración con A. Vanderbauwhede en el estudio de las bifurcaciones subharmonicas en sistemas hamiltonianos y el soporte financiero de la Junta de Andalucía y del proyecto OTAN CGR-972260.

Referencias

[1] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, New York Addison-Wesley 2nd. Ed. (1978).

[2] Gutzwiller, M. C,*Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer 1990.

[3] E. J. Doedel and X. J. Wang, *AUTO94: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations* (1995).

[4] M. K. Meyer & G. R. Hall, *Introduction to hamiltonian Dynamical Systems and the N-body problem.* Springer Verlag (1992).

[5] J. Galán & E. Freire *Chaos in model of coupled quantum wells; bifurcations of periodic orbits in a symmetric hamiltonian system.* Rep. Math. Phys. **44** (1999).

[6] H. Poincaré, *Les methodes nouvelles de la mechanique celeste.* Gauthier-Villar, Paris (1899).

1 Departamento de Matemática Aplicada II. Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n. Sevilla 41092, (España) malmaraz@matinc.us.es

2 Department of Computer Science. Concordia University. 1455 Boulevard de Maisonneuve O. Montreal, Quebec, H3G 1M8, (Canada) doedel@cs.concordia.ca